المحذوف من الكتاب

تمرين ص 35 - برهان ② ص 57.

ص 58 اثبات مبرهنة (3).

ص 60 اثبات مبرهنة (5)

ص 61 - ص 66 اثبات مبرهنة 7.
مثال 16 ص 73.

ص 74 - ص 75 - 76 - 77

مطلوب

78 حتى المبرهنة ١٠ - ص 81

82 - 83 حتى 89.

اثبات مبرهنة 17 (ص 90).

ص ١٠١ - اثبات مبرهنة 3 ص

١٠٣ - ١٠٤ - ١٠١ - ١١١ حتى

الفضاء المتري الخطي - مثال (9) ص 119

مطلوب

الكرة الواحدية ص 120 - 121 -

ص 122 عدا القواعد - مثال 12 ص

123 - 124 - 125 عدا نص

مبرهنة 6 - ص 126 - ص 130 -

131 - برهان مبرهنة 11 ص 136 -

137 - برهان مبرهنة 12 ص 138 -

ص 139 - 140 ← 151 - مبرهنة

17 ص 152 - الفضاء P[a,b] ص

155 مطلوب نقط ترفيه - ص 156 فضاء

المتتاليات العددية لعند فضاء خطي هذا المطلوب

وباقي ص 156 حذف - ص 157 .

- الصفحتين 159 - 160 مطلوب فقط

تمارين .

الموضوع ..... التاريخ / / 20

أما إذا كان $\lambda \neq 0$ ، $\mu \neq 0$:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\lambda}{|\lambda|} x \in E \\ \frac{\mu}{|\mu|} \cdot y \in E\end{array}\right)$$ بحكم التوازن.

ونلاحظ أيضاً

$$\frac{|\lambda|}{|\lambda|+|\mu|} + \frac{|\mu|}{|\lambda|+|\mu|} = 1$$

$$\lambda x + \mu y = (|\lambda| + |\mu|)\left[\frac{|\lambda|}{|\lambda|+|\mu|} \cdot \frac{\lambda x}{|\lambda|} + \frac{|\mu|}{|\lambda|+|\mu|} \cdot \frac{\mu y}{|\mu|}\right] \in E$$ (لأنها محدبة) $\Rightarrow$ المجموعة E محدبة مطلقاً.

تمارين:

① إن كل فضاء خطي جزئي من فضاء خطي منظم مجموعة محدبة.

الحل: نفرض أن X ف. خ. م. بالتالي تتحقق الشروط. وبالتعريف يكون بشرط وحيد.

{ أي أنه من أجل $x \in \mathbb{R}^3$ فإن: $x = \sum_{i=1}^{3} x_i e_i = \dots$

$\Rightarrow x = (x_1, x_2, x_3) = x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1)$.

بالتالي $\{k , i , j\}$ تشكل قاعدة للفضاء $\mathbb{R}^n \Leftarrow$ مستقلة خطياً }

[مثال: $\mathbb{Q}$ هل تشكل فضاءً خطياً فوق $\mathbb{R}$ ؟

لا ليست مغلقة بالنسبة لعملية الضرب بعدد.

مثلاً $2 \in \mathbb{Q}$ ، $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$ ، ولكن $2\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

مثال: $\mathbb{R}$ ليس فضاءً خطياً فوق $\mathbb{C}$.}

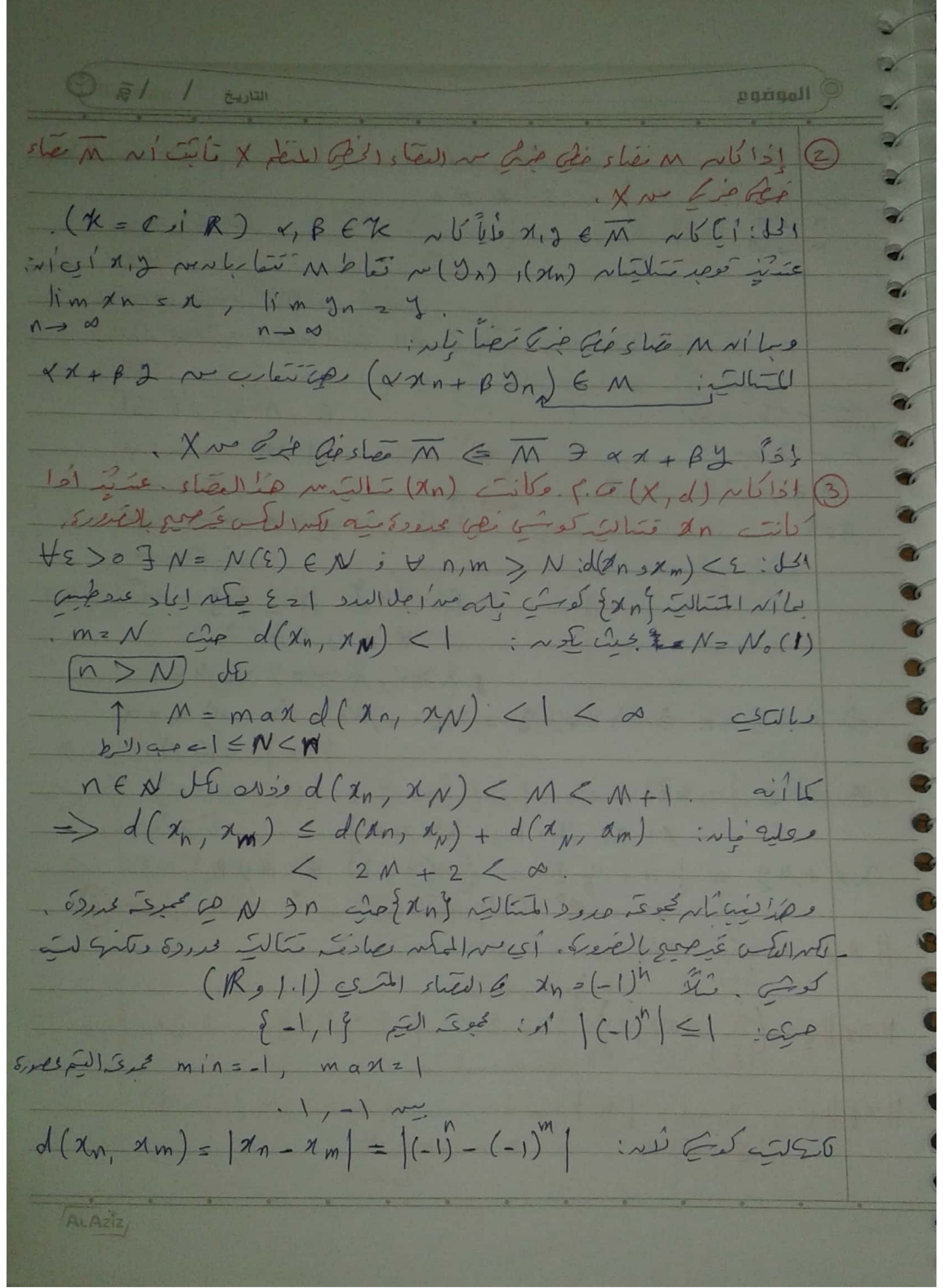
وليكن M فضاء خطي جزئي من $X \Leftarrow$

$\forall x, y \in M$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$: $\alpha x + \beta y \in M$.

وبشكل خاص: لو كان: $\alpha \geq 0$ ، $\beta \geq 0$ بحيث أن $\alpha + \beta = 1$

فإن: $\alpha x + \beta y \in M$.

Al Aziz



② إذا كان M فضاء خطي جزئي من الفضاء الخطي المنظم X فأثبت أن $\overline{M}$ فضاء خطي جزئي من X.

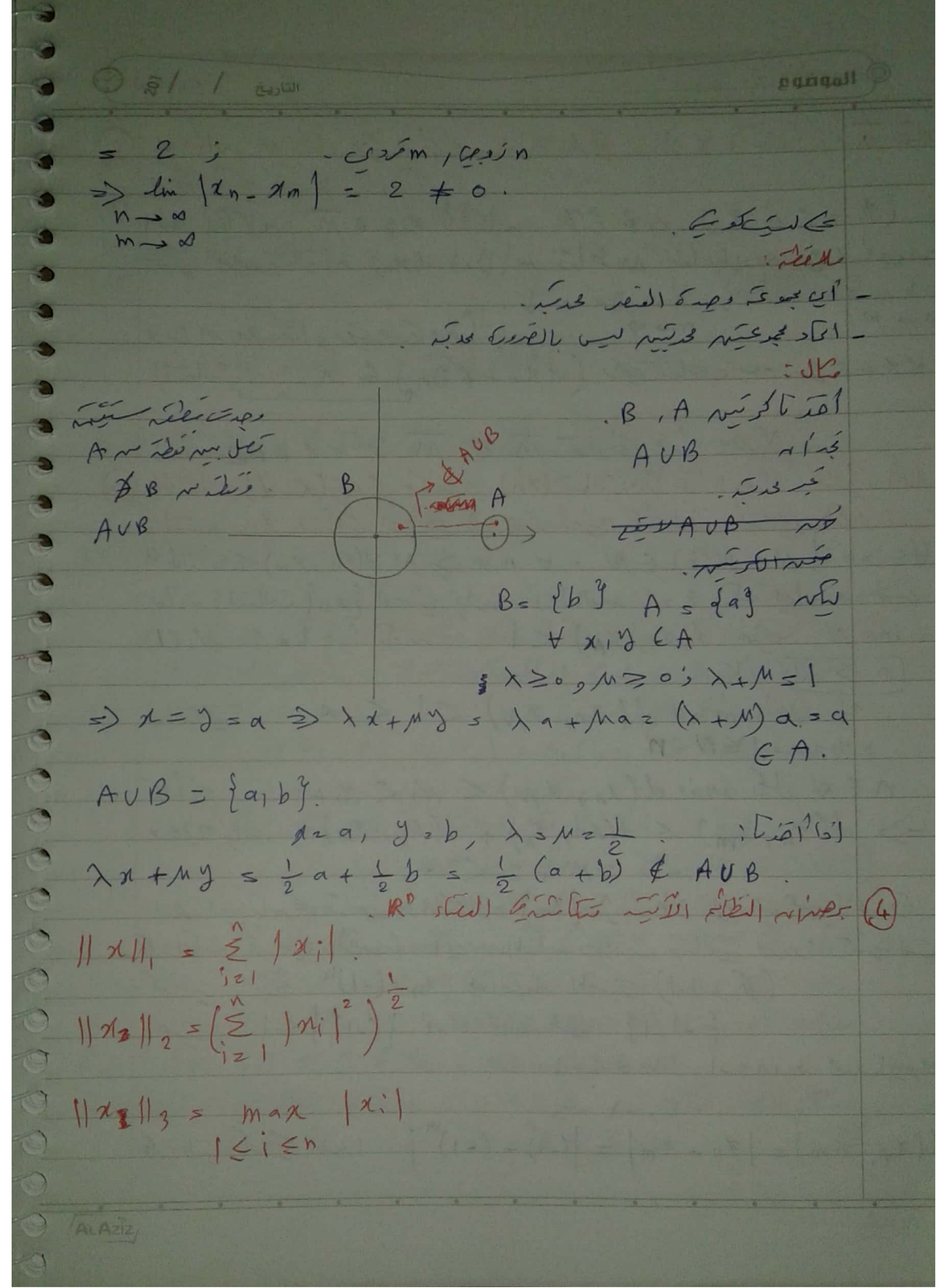
الحل: إذا كان $x, y \in \overline{M}$ فإذا كان $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ أو $\mathbb{R}$).
عندئذٍ توجد متتاليتان (x_n) و (y_n) من M تتقاربان من x, y أي أن:
$\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.
وبما أن M فضاء خطي جزئي فإن:
المتتالية: $(\alpha x_n + \beta y_n) \in M$ وهي تتقارب من $\alpha x + \beta y$
إذاً $\alpha x + \beta y \in \overline{M}$ ⇐ $\overline{M}$ فضاء خطي جزئي من X.

③ إذا كان (X, d) ف.م. وكانت (x_n) متتالية من هذا الفضاء. عندئذٍ إذا كانت x_n متتالية كوشي فهي محدودة لكن العكس غير صحيح بالضرورة.

الحل: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N};\ \forall n,m \geq N: d(x_n, x_m) < \varepsilon$
بما أن المتتالية $\{x_n\}$ كوشي فإنه من أجل العدد $\varepsilon = 1$ يمكن إيجاد عدد طبيعي $N = N_0(1)$ بحيث يكون: $d(x_n, x_N) < 1$ حيث $m = N$.
لكل $n > N$

وبالتالي $M = \max d(x_n, x_N) < 1 < \infty$
حسب الشرط $1 \le N < M$

كما أنه $d(x_n, x_N) < M < M+1$ وذلك لكل $n \in \mathbb{N}$
وعليه فإن: $\Rightarrow d(x_n, x_m) \le d(x_n, x_N) + d(x_N, x_m)$
$< 2M + 2 < \infty$.
وهذا يعني بأن مجموعة حدود المتتالية $\{x_n\}$ حيث $n \in \mathbb{N}$ هي مجموعة محدودة.
لكن العكس غير صحيح بالضرورة. أي من الممكن مصادفة متتالية محدودة ولكنها ليست كوشي. مثلاً $x_n = (-1)^n$ في الفضاء المتري $(\mathbb{R}, |\cdot|)$
حيث: $|(-1)^n| \le 1$ أو: مجموعة القيم $\{-1, 1\}$
$\min = -1$, $\max = 1$ مجموعة القيم محصورة
بين 1, -1.
ليست كوشي لأن: $d(x_n, x_m) = |x_n - x_m| = |(-1)^n - (-1)^m|$



$= 2$; n زوجيا , m فردي .

$$\Rightarrow \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} |x_n - x_m| = 2 \neq 0.$$

ليست كوشي.

ملاحظة:

- أي مجموعة وحيدة العنصر محدبة.
- اتحاد مجموعتين محدبتين ليس بالضرورة محدبة.

مثال:

أخذنا كرتين A , B.

نجد أن $A \cup B$ غير محدبة.

وجدت قطعة مستقيمة تصل بين نقطة من A ونقطة من B $\notin A \cup B$

B

A

$\notin A \cup B$

لتكن $A = \{a\}$, $B = \{b\}$

$\forall x, y \in A$

$\lambda \geq 0 , \mu \geq 0 ; \lambda + \mu = 1$

$$\Rightarrow x = y = a \Rightarrow \lambda x + \mu y = \lambda a + \mu a = (\lambda + \mu) a = a \in A.$$

$A \cup B = \{a, b\}.$

أما إذا أخذنا: $x = a, \ y = b, \ \lambda = \mu = \frac{1}{2}$.

$$\lambda x + \mu y = \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b = \frac{1}{2}(a+b) \notin A \cup B.$$

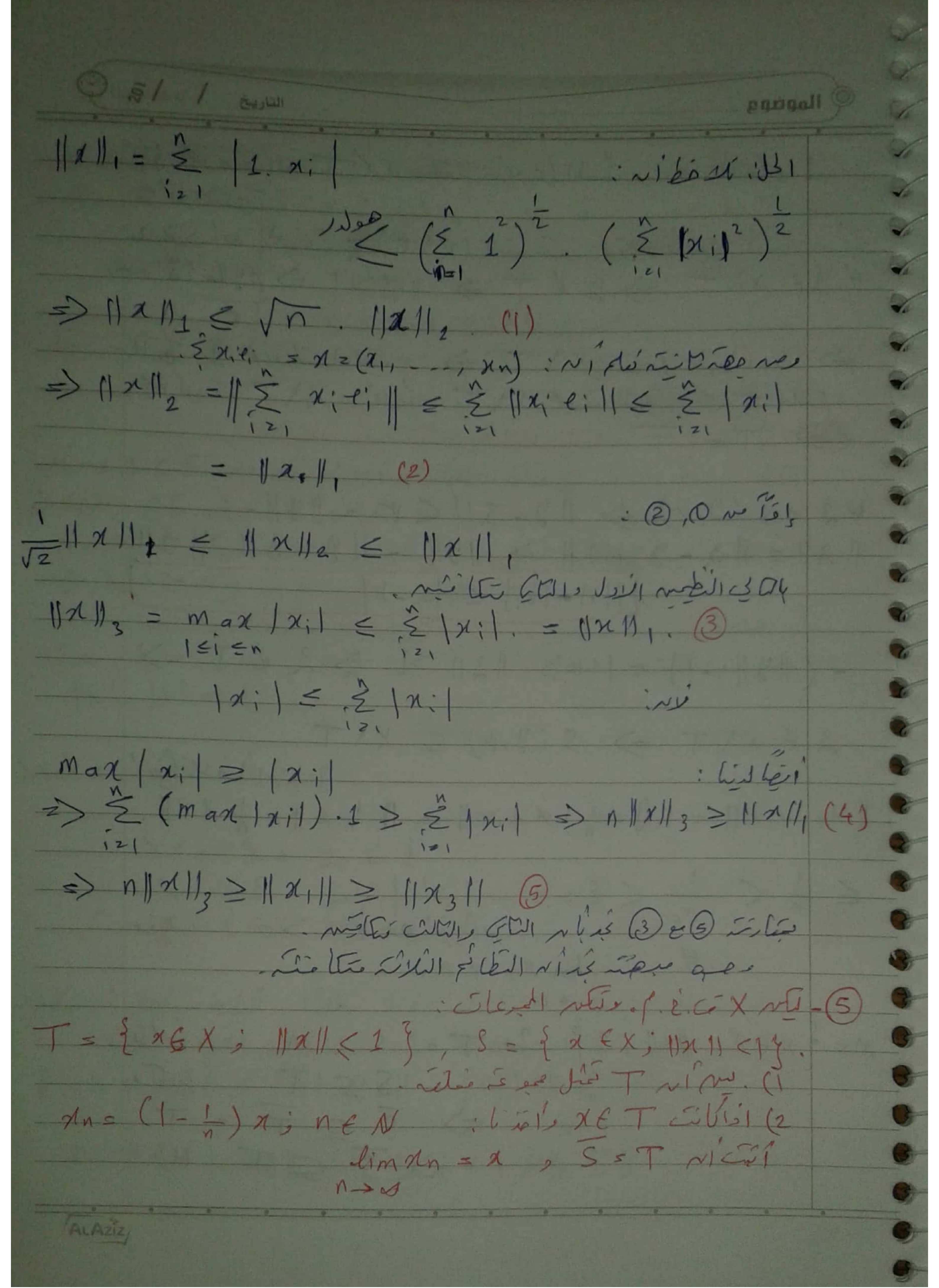
(4) برهن أن النظائم الآتية متكافئة في الفضاء $\mathbb{R}^n$.

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|x\|_3 = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

ALAZIZ



الحل: نلاحظ أنه:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |1 . x_i|$$

$$\overset{\text{هولدر}}{\le} \left(\sum_{i=1}^{n} 1^2\right)^{\frac{1}{2}} . \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \|x\|_1 \le \sqrt{n} . \|x\|_2 \quad (1)$$

ومن جهة ثانية نعلم أنه: $x = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

$$\Rightarrow \|x\|_2 = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right\| \le \sum_{i=1}^{n} \|x_i e_i\| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$= \|x\|_1 \quad (2)$$

إذاً من ①، ②:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \|x\|_1$$

بالتالي النظيمين الأول والثاني متكافئين.

$$\|x\|_3 = \max_{1 \le i \le n} |x_i| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|x\|_1 . \quad (3)$$

لأن: $|x_i| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

أيضاً لدينا: $\max |x_i| \ge |x_i|$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (\max |x_i|) . 1 \ge \sum_{i=1}^{n} |x_i| \Rightarrow n\|x\|_3 \ge \|x\|_1 \quad (4)$$

$$\Rightarrow n\|x\|_3 \ge \|x_1\| \ge \|x_3\| \quad (5)$$

بمقارنة ⑤ مع ③ نجد بأن الثاني والثالث متكافئين.

ومنه مما سبق نجد أن النظائم الثلاثة متكافئة.

⑤- ليكن X ف.خ.م. ولتكن المجموعات:

$T = \{x \in X ; \|x\| \le 1\}$, $S = \{x \in X ; \|x\| < 1\}$.

1) بين أن T تمثل مجموعة مغلقة.

2) إذا كانت $x \in T$ وأخذنا: $x_n = (1 - \frac{1}{n})x ; n \in N$

أثبت أن $\bar{S} = T$, $\lim_{n \to \infty} x_n = x$

الحل: نلاحظ أنه T كرة مغلقة مركزها المبدأ و نصف قطرها 1

S كرة مفتوحة " " " " ".

نلاحظ أن المجموعة $(X \setminus T)$ مفتوحة. وذلك لأنه:

$$\forall y \in X \setminus T \Rightarrow y \notin T \Rightarrow \|y\| > 1 \Rightarrow \underbrace{\|y\| - 1}_{r} > 0$$

$\Rightarrow S(y, r) \subset X \setminus T \Rightarrow$ النقطة y هي نقطة داخلية للمجموعة $X \setminus T$. أي أنه $X \setminus T$ مجموعة مفتوحة $\Leftarrow$ T مغلقة.

$$\Leftrightarrow T = \overline{T}$$

$$\forall z \in S(y, r) \Rightarrow \|y - z\| < r = \|y\| - 1.$$

$$\|z\| = \|z - y + y\| \geq \|y\| - \|y - z\| > \|y\|$$

لأنه: $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$

$$-(\|y\| - 1) = 1 \Rightarrow \|z\| > 1 \Rightarrow z \notin T \Rightarrow$$

$$z \in X \setminus T \Rightarrow S(y, r) \subseteq X \setminus T$$

أيضاً نلاحظ أنه:

$$\|x_n - x\| = \|(1 - \tfrac{1}{n})x - x\| = \|\tfrac{1}{n}x\| = \tfrac{1}{n}\|x\|.$$

$$\leq \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

وذلك: $\forall \varepsilon > 0$ ومنه نجد أنه:

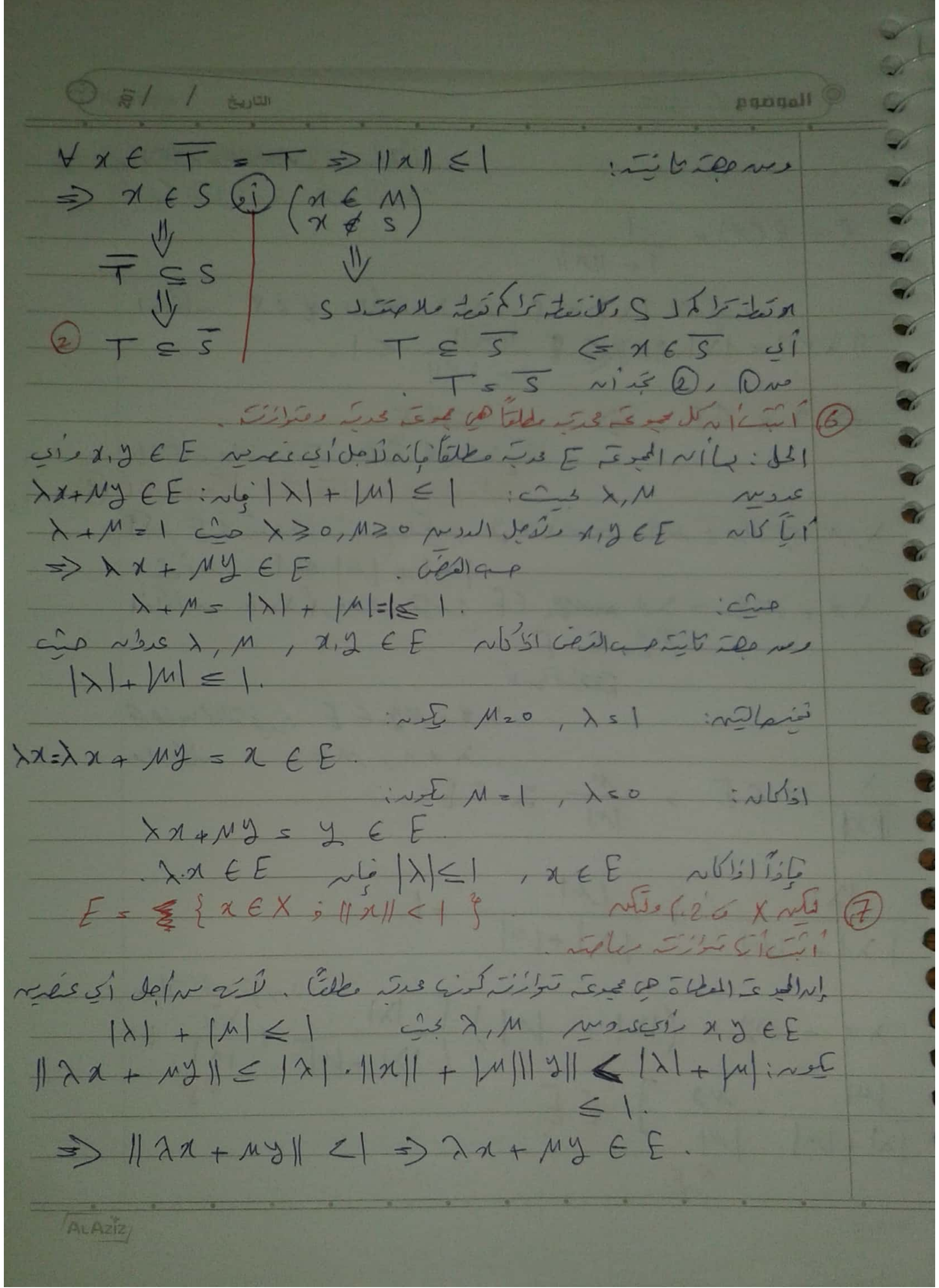
$$\lim_{n \to \infty} x_n = x.$$

- نلاحظ أنه: $T = S \cup M$ حيث $M = \{x \in X ; \|x\| = 1\}$

ولكن: $S \subseteq T$

$$\Rightarrow \overline{S} \subseteq \overline{T} = T$$

$$\Rightarrow \overline{S} \subseteq T. \quad (1)$$



ومن جهة ثانية: $\forall x \in \overline{T} = T \Rightarrow \|x\| \le 1$

$\Rightarrow x \in S$ (1) $\begin{pmatrix} x \in M \\ x \notin S \end{pmatrix}$

$\Downarrow$

$\overline{T} \subseteq S$

$\Downarrow$

(2) $T \subseteq \overline{S}$

$\Downarrow$

هو نقطة تراكم لـ S وكل نقطة تراكم تعتبر ملاصقة لـ S

أي $x \in \overline{S} \Leftarrow T \subseteq \overline{S}$

ومن (1) ، (2) نجد أن $T = \overline{S}$.

(6) أثبت أن كل مجموعة محدبة مطلقاً هي مجموعة محدبة ومتوازنة.

الحل: بما أن المجموعة E محدبة مطلقاً فإنه لأجل أي عنصرين $x,y \in E$ ولأي عددين λ,μ حيث: $|\lambda| + |\mu| \le 1$ فإن: $\lambda x + \mu y \in E$

إذاً كان $x,y \in E$ ولأجل العددين $\lambda \ge 0, \mu \ge 0$ حيث $\lambda + \mu = 1$

$\Rightarrow \lambda x + \mu y \in E$ حسب الفرض.

حيث: $\lambda + \mu = |\lambda| + |\mu| = 1 \le 1$.

ومن جهة ثانية حسب الفرض إذا كان $x,y \in E$ ، λ,μ عددان حيث $|\lambda| + |\mu| \le 1$.

بحالة خاصة: $\lambda = 1$, $\mu = 0$ يكون:

$\lambda x = \lambda x + \mu y = x \in E$.

إذا كان: $\lambda = 0$, $\mu = 1$ يكون:

$\lambda x + \mu y = y \in E$.

وإذاً إذا كان $x \in E$, $|\lambda| \le 1$ فإن $\lambda x \in E$.

(7) لتكن X ف.ش.م ولتكن $E = \{x \in X ; \|x\| < 1\}$

أثبت أن E متوازنة ومحدبة.

إن المجموعة المطلوبة هي مجموعة متوازنة كونها محدبة مطلقاً. لأنه من أجل أي عنصرين $x,y \in E$ ولأي عددين λ,μ بحيث $|\lambda| + |\mu| \le 1$

يكون: $\|\lambda x + \mu y\| \le |\lambda| \cdot \|x\| + |\mu| \|y\| < |\lambda| + |\mu| \le 1$.

$\Rightarrow \|\lambda x + \mu y\| < 1 \Rightarrow \lambda x + \mu y \in E$.

بالتالي محدبة مطلقاً.

أيضاً تشكل مجموعة ماصة لأنه:

$$f = f(x) = \frac{1}{1 + \|x\|}$$

اذا كان $x \in X$ ولنأخذ λ بحيث $\rho \geq |\lambda|$ عندئذٍ:

$$\|\lambda x\| = |\lambda| . \|x\| \leq \rho \frac{\|x\|}{1 + \|x\|} < 1.$$

$\Rightarrow \lambda x \in E . \Rightarrow$ E ماصة.

بالتالي ماصة ومحدبة مطلقاً أي متوازنة.

(4) أثبت أنه كل محدبة ومتوازنة محدبة مطلقاً.

لتكن E محدبة ومتوازنة. ولتكن x, y عنصرين ما من E والعددين μ, λ بحيث أن: $|\lambda| + |\mu| \leq 1$

اذا كان $\lambda = 0$ أو $\mu = 0$ نجد: $\lambda x + \mu y = \lambda x \in E$

$= \mu y \in E$

لأنها متوازنة.

في كلتا الحالتين نجد: $\lambda x + \mu y \in E$.

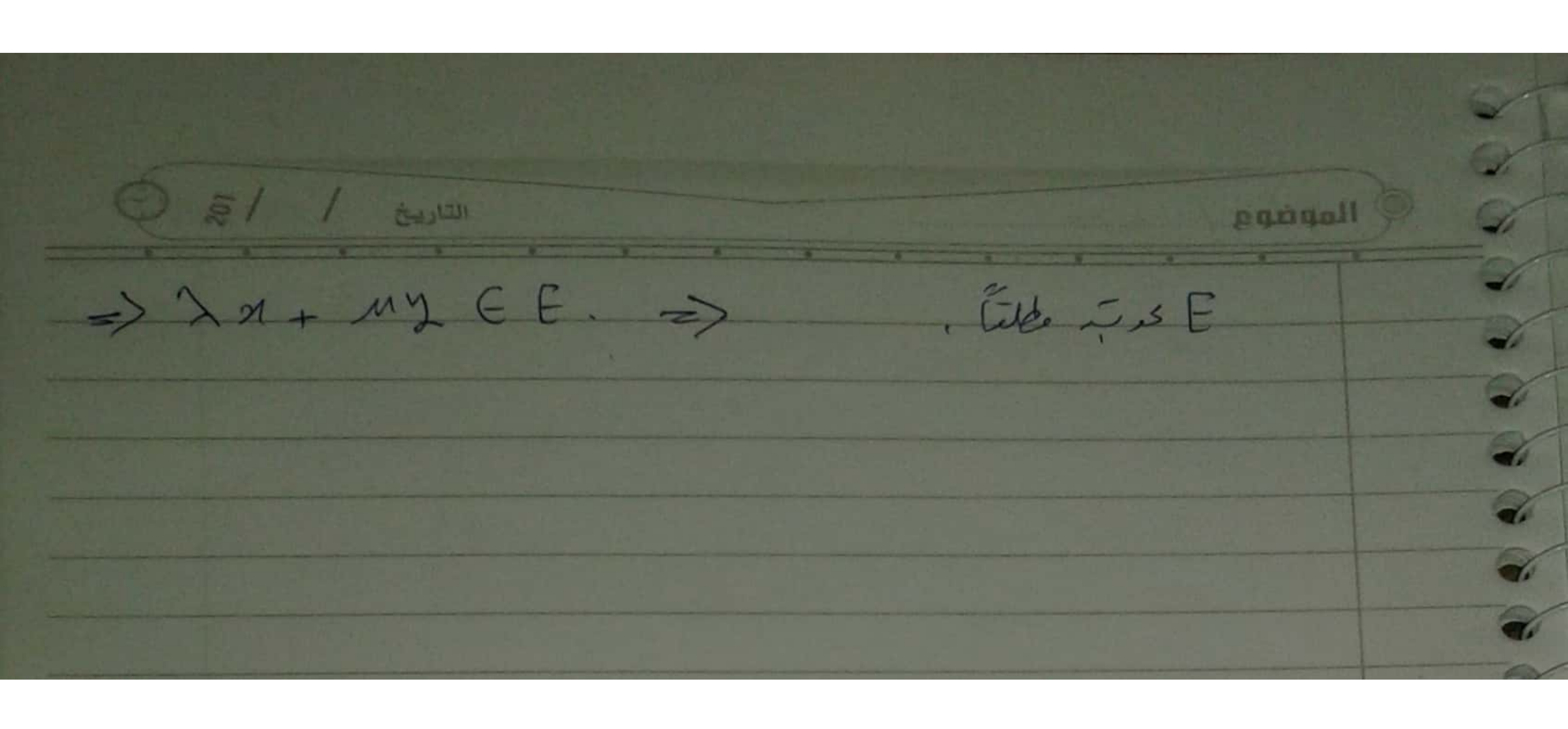
واذا كان $\lambda \neq 0 , \mu \neq 0$.

$$\frac{\lambda}{|\lambda|} x \in E , \quad \frac{\mu}{|\mu|} y \in E.$$

$$\frac{|\lambda|}{|\lambda| + |\mu|} + \frac{|\mu|}{|\lambda| + |\mu|} = 1.$$

وبالتالي نجد:

$$\lambda x + \mu y = (|\lambda| + |\mu|) \left[\frac{|\lambda|}{|\lambda| + |\mu|} \cdot \underbrace{\frac{\lambda x}{|\lambda|}}_{\in E} + \frac{|\mu|}{|\lambda| + |\mu|} \cdot \underbrace{\frac{\mu y}{|\mu|}}_{\in E} \right] \in E$$



الموضوع

التاريخ / / 201

$\Rightarrow \lambda x + \mu y \in E . \Rightarrow$ E محدبة مطلقاً .